Exercice 18.2
Atmosphère adiabatique

On étudie la répartition de température et de pression en altitude de l'air sec dans l'atmosphère en équilibre adiabatique (PV^{γ}) = cte). On suppose que l'air est un gaz parfait de masse molaire $M = 29.10^{-3}$ kg. mol^{-1}, de coefficient $\gamma = 1,4$.
A la surface du sol : $T_0 = 293$ K et $P_0 = 10^5$ Pa.
On prendra $R = 8,30$J. K^{-1}. mol^{-1} et $g = 10$m.s^{-2}.

Établir l'expression de la température T en fonction de l'altitude z et des constantes T_0, g, M, R, γ.
On introduira la constante $\beta = Mg/RT_0$.
Établir l'expression de la pression P en fonction de z et de β, γ, P_0.
Application numérique : calculer les valeurs du gradient de température dT/dz, de la température T_1 et de la pression P_1 à l'altitude $z_1 = 2\ 300$ m.

Corrigé 18. 2
Atmosphère adiabatique

La loi fondamentale de l'hydrostatique se traduit par $dP = -\rho g dz$, le gaz est parfait donc $\rho = \frac{M}{V_m} = \frac{MP}{RT}$, en reportant dans la relation précédente on obtient : $\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} dz$ (1)

D'autre part la loi de Laplace qui se traduit par $PV^\gamma = cte$,peut s'écrire , quand on calcule la dérivée logarithmique : $\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$, en utilisant la dérivée logarithmique de l'équation d'état des gaz parfaits $\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$, la loi de Laplace peut se traduire en variables T et P par : $\frac{dP}{P} = \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)\frac{dT}{T}$

En reportant dans (1), on obtient $dT = \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)\frac{Mg}{R} dz$ qui s'intègre en :

$$\boxed{T = T_0\left(1 + \beta\frac{(1-\gamma)}{\gamma} z\right)}$$

D'autre part la loi de Laplace en variable T et P se traduit par : $P^{1-\gamma}T^\gamma = P_0{}^{1-\gamma}T_0{}^\gamma$ donc en utilisant la relation précédemment encadrée, on obtient :

$$\boxed{P = P_0\left(1 + \beta\frac{(1-\gamma)}{\gamma} z\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

c)dT/dz= -9,98 10^{-3}K. m^{-1},T_1= 270 K,P_1 = 0,75 10^5Pa